DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

Le but de ce problème est de démontrer le théorème fondamental de l'algèbre. Pour ce faire dans la première partie on démontre le théorème de DIRICHLET *pour les applications de classe C^2, puis, dans la troisième partie on démontre le théorème de* LIOUVILLE.

Si $P\in\mathbb{C}[X]$ on note d(P) le degré de P, et, on identifie P et la fonction polynomiale associée à P.

I Quelques résultats sur les applications de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques.

1° Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $g\in C^1([a,b],\mathbb{C})$, montrer que : $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin\left[(2n+1)\frac{t}{2}\right]dt = 0.$

2° Soit $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, soit $x\in\mathbb{R}$, on définit l'application g_x de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$g_x(0) = 0 \text{ et } \forall t\in]0,\pi],\ g_x(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{\sin\left[\frac{t}{2}\right]}.$$

Montrer que, $\forall x\in\mathbb{R}$, $g_x\in C^1([0,\pi],\mathbb{C})$.

3° Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{x}{2}\right]}{\sin\left[\frac{x}{2}\right]}$.

En déduire que : $\int_0^{\pi} \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{t}{2}\right]}{\sin\left[\frac{t}{2}\right]}dt = \pi.$

4° Soit $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 2π-périodique, si $n\in\mathbb{Z}$, on pose $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$. Si $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}.$$

a- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ S_n(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{-iku}\right)du.$

b- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ S_n(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} \left[f(x+u)+f(x-u)\right]\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{-iku}\right)du.$

c- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ S_n(x) - f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} \left[f(x+u)+f(x-u)-2f(x)\right]\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{u}{2}\right]}{\sin\left[\frac{u}{2}\right]}du.$

d- En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty}\ (S_n(x) - f(x)) = 0.$

5° Soit $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 2π-périodique,

a- Montrer que la famille de nombre complexes $(c_n(f''))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

b- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{Z}^*,\ c_n(f) = \dfrac{1}{in}c_n(f') = -\dfrac{1}{n^2}c_n(f'').$

c- Déduire de a- et b- que la série $x\to c_0(f)+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n(f)e^{inx}+c_{-n}(f)e^{-inx}\right)$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. (Le théorème de Dirichlet pour les fonctions de classe C^2).

II Quelques résultats sur les éléments de $\mathbb{C}[X]$ sans zéro(s).

On suppose qu'il existe $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)\neq 0$ et $d(P)\geq 1$; on note $n_0 = d(P)$ et $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}\alpha_k X^k$.

Soit $r\in\mathbb{R}$, on note g_r l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\forall\theta\in\mathbb{R},\ g_r(\theta) = \dfrac{1}{P\left(re^{i\theta}\right)}$.

On note h l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^2,\ h(r,\theta) = \dfrac{1}{P\left(re^{i\theta}\right)}$.

1° a- Montrer que $\forall z\in\mathbb{C},\ |P(z)|\geq\left|\alpha_{n_0}\right||z|^{n_0} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1}|\alpha_k||z|^k.$

b- Soit f l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ f(x) = \left|\alpha_{n_0}\right|x^{n_0} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1}|\alpha_k|x^k.$

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

c- Montrer que : $\forall A\in\mathbb{R},\ \exists B\in\mathbb{R},\ \forall z\in\mathbb{C},\ |z|>B\Rightarrow|P(z)|>A.$

En déduire que : $\exists r_0\in\mathbb{R}^+,\ \forall z\in\mathbb{C},\ |z|>r_0\Rightarrow\dfrac{1}{|P(z)|}\leq 1.$

d- r_0 est le réel positif du c-, montrer que : $\exists M_0 \in \mathbb{R}^+, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq r_0, \Rightarrow \left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq M_0$.

e- Montrer que : $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall z \in \mathbb{C}, \frac{1}{|P(z)|} \leq M$.

2° a- Montrer que : $\forall r \in \mathbb{R}, g_r \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

b- Montrer que : $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$.

3° Soit $n \in \mathbb{Z}$, on note c_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que : $\forall r \in \mathbb{R}, c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_r(\theta) e^{-in\theta} d\theta$.

a- Exprimer $c_n(r)$ en fonction de n, r et h.

b- Montrer que c_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c- Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de r et $\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)$.

d- Montrer que c_n vérifie une équation différentielle du premier ordre que l'on intègrera sur $\mathbb{R}^{*+}$. On posera $a_n = c_n(1)$.

e- Montrer en utilisant 3°b que : $\forall n \in \mathbb{Z}, n < 0 \Rightarrow a_n = 0$.

4° Soit $z \in \mathbb{C}$: (les a_n sont ceux de la question précédente)

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge et que : $\frac{1}{P(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. (On précisera son rayon de convergence).

III Quelques résultats sur les sommes de séries entières bornées sur $\mathbb{C}$.

Dans ce paragraphe on considère $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ une série entière de rayon infini, on note f sa somme.

(*i.e.* $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$)

1° Soit $p \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}^+$, calculer $B(p,r) = \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-ip\theta} d\theta$.

2° On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$. (*i.e.* $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq M$)
Donner un majorant de B(p,r) indépendant de p et r.

3° En déduire que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, f est constante sur $\mathbb{C}$. (le théorème de Liouville).

4° Montrer le théorème suivant : (le théorème fondamental de l'algèbre)

« Tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins un zéro ».